音と波動方程式

谷田貝　雅　典

1. はじめに

人が感知する音は「鼓膜を振動させる空気の波動」であり、波動は「振動が空間を伝播する現象」である。たとえば、誰かの歌声は、歌っている人の声帯が振動し、その振動が下咽頭内の空気へ伝播し、やがて口腔・鼻腔内から体外の空気へ伝播し、聴者の体内の中耳にある空気にまで伝播し鼓膜を振動させ、各器官を通じて感知することによって聴くことができる。この際、重要なのは、歌った人の体内にあるもの（例えば、空気等の物質）は、何ら聴者の体内には届いておらず、あくまで空気の波動が届いたということである。よって、この空気の波動を正確に再現できれば、歌う人がいなくとも、歌声を聴くことができる。

つまり、音の本質を知るには、波動を理解することが重要となる。

2. 波動とは

波動（本稿では波も同義とする）を模式的に示すため、図 1 に媒質中の振動の伝播を示す。図 1 より、波動は例外[(1)] をはぶき、まずそれを伝える（構成する）物質があり、これを媒質と呼ぶ。図 1 における媒質は黒の実線で描いたものである。また、媒質の位置を示すために、図 1 中には「a-1, a-2, a-3」群および「b-1, b-2, b-3」群の計 6 つのマーカーを記す。図 1 中の媒質とマーカーは、例えば、媒質が液体なら 6 つのマーカーは浮きに相当し、媒質が紐ならマーカーは貼り付けた紙片に相当する。

ここで、図 1 中の時刻 t より少し前（過去）に媒質を上下に一度振動（パルス）させたとする。すると時刻 t には、図 1 中の上段模式図のように、振

動はマーカー「a-1」をすでに通過し、マーカー「a-2」の位置を変化させ、マーカー「a-3」に差し掛かろうとしている。つづいて、時刻 t から α 時間だけ経過すると、振動はすでにマーカー「a-1, a-2, a-3」群を通過し、マーカー「b-2」の位置を変化させている最中となる。ここで、図 1 中の点線で記した補助線を見ると、上段 t から下段 $t+\alpha$ 時間中に、それぞれマーカー「a-2」「b-2」は上下にしか移動していないことが分かる。よって、6 つのマーカー下の媒質は振動の伝播方向（図 1 中の右方向）には動かないことに注意していただきたい。時刻 t より少し前に発生した振動は、媒質を上下に動かし、ただ、その上下運動のみが場所によって少しずつ遅れながら右へ伝播しているため、振動が進行しているように見えるのである。以上が波動の概要である。

図 1 中の各マーカー下の媒質は、振動し中心より上に上がる時には下向きに、中心より下に下がる時には上向きに力を受ける。つまり、媒質は常に中心の位置（平衡状態）に戻るような力が働いている。この戻るような力を「復元力」と呼ぶことにする。

また、復元力は媒質が中心位置に近づくと弱くなり、中心位置に来ると 0 となる。ここで上下運動が止まると、振動はそこで終わりである。よって、

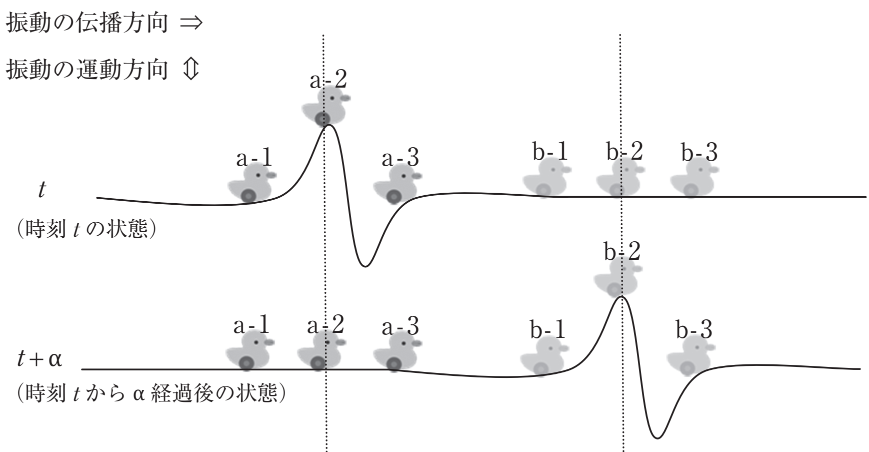

図 1　媒質中の振動の伝播（1 次元の波動（横波）の模式図）

振動が伝播するためには、上下動から媒質が中心にきた瞬間に、運動しようとする勢いで上あるいは下に通り抜けなくてはならない。この0から上あるいは下へ通り抜けようとする勢いがある運動を「慣性」とよぶ。

さらに、媒質がどんな運動をしても、すぐ隣にその運動が伝わらないのであれば、振動はしても「伝播する」波動にはならない。

以上より、波動の条件を整理すると下記の通りとなる。

①変化を平衡状態にもどそうとする「復元力」がある

②変化に「慣性」がある

③変化が隣接点へ「伝播」する

なお、物理学においては、上記の条件をすべて満たしているものは非常に多く、日常では音・光・水の波などは、①～③の条件を満たしている。逆に波動の条件を満たさない現象を例示すると、以下の通りとなる。単振り子の振動は①②を満たすが、③を満たさない（特に真空中なら空気すらないので周囲に何も伝播しない)。鉄板などを熱する際の、熱伝導は①の一部と③を満たすが、②を満たさない（熱は高い状態から低い平衡状態に一方通行には戻るが、再び勝手に高い状態には戻らない)。爆発（または不可逆反応）は②の一部と③を満たすが、①を満たさない（一度変化が起こると、変化前の状態（平衡状態）には戻らない。)

3. 音とは

音は空気の振動が伝播した波動である。具体的には、空気の圧縮と膨張による波動（縦波）である。図2に音叉を叩いた時の、空気の波動（縦波）の様子を示す。ただし、音は縦波として伝播し、前節の図1に示した横波（振動の伝播方向と振動の運動方向が直行）の模式図とは形がことなり、振動の伝播方向と振動の運動方向が並行となる。ここで、図2中の時刻 t より少し前（過去）に音叉の棒をたたき振動を起こしたとする。すると時刻 t には、図2中の上段模式図のように、音叉の右端は内側に曲がり、空いた体積分の周囲の空気は膨張する。つづいて、時刻 t から α 時間だけ経過すると、音叉の右端は外側に曲がり、その体積分周囲の空気を押しのけ空気を圧縮する。

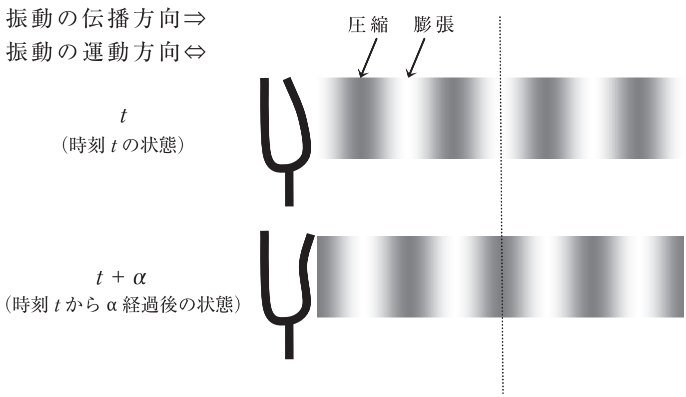

図 2　音叉をたたいた際の周囲の空気の振動の伝播（縦波の模式図）

圧縮された空気の周囲は高圧になりさらに回りを押す。逆に膨張すると低圧になり、やがて回りの空気から押されることになる。この空気の膨張と圧縮は、もとの平衡状態に戻ろうとする作用で、前節①の「復元力」として作用する。また、図 2 中の点線をみると、上段の時刻 t に膨張した空気が回りを押した結果として、回りは圧縮される。その後、下段の時刻 $t+\alpha$ を見ると、今度は空気の復元力により周囲から押され、圧縮状態となる。結果、圧縮・膨張運動が交互に変化し隣りへ伝わる。これが前節③の「伝播」となる。なお、空気は窒素分子や酸素分子という、質量を持った粒子の集合なので、古典物理学的[(2)] には、その運動はニュートン力学に従い前節②の「慣性」を持つ。ゆえに、音は前節の①〜③の条件を満たし、波動としてふるまう。（ちなみにニュートン力学の原著『自然哲学の数学的諸原理』（略称プリンシピア）は、Cambridge Digital Library[(i)] で閲覧できる。）

4. 波動方程式（1 次元の波動を例として）

波動方程式とは、波動現象を記述する基本となる方程式である。波動現象が起こるのは 2. 節で述べたように「復元力と慣性があり、変化が伝播する」ことが条件である。以下では音の波動方程式を単純化するために、2. 節で述べた 1 次元の波動を、3. 節で述べた縦波として考え、弾性固体を伝播する縦

波の方程式として考える。

ここでは弾力[3]を持った固体の棒を考え、その棒の端に、図3のように撃力（パルス）を与えた時、この衝撃がどのように伝わるかを考える。

さて、図3中の変数 $y(x,\ t)$ は、本来 x の位置にいるべき物質（媒質）が $x+y(x,\ t)$ の位置まで移動することを表す変数とする。またこの変数は、時刻の関数でもあるので時刻を t として記す。この時、本来 $x+dx$ の位置にいるべき物質は $x+dx+y(x+x,\ t)$ の位置まで移動する。よって、本来「x から $x+dx$ まで」という dx の幅を持っていた部分が、$dx+y(x+dx,\ t)-y(x,\ t)$ の幅に変化することになる。$y(x,\ t)$ の関数の形によって、これは元の長さ dx より長くなることもあれば、短くなることもある。この物質は、ばねと同様に、伸び縮みに比例した力（この比例定数を k とする）が働くような弾性固体とする。

すると、長さ dx の部分は、$k(y(x+dx,\ t)-y(x,\ t))$ の力で自分の両サイドを引っ張る（圧縮）、または、$-k(y(x+dx,\ t)-y(x,\ t))$ の力で自分の両サイドを押す（膨張）作用がおこる。ここで、この比例定数 k を、ばねの場合として考えると「短いばねほど伸ばしにくい」という事実から、k の値は dx

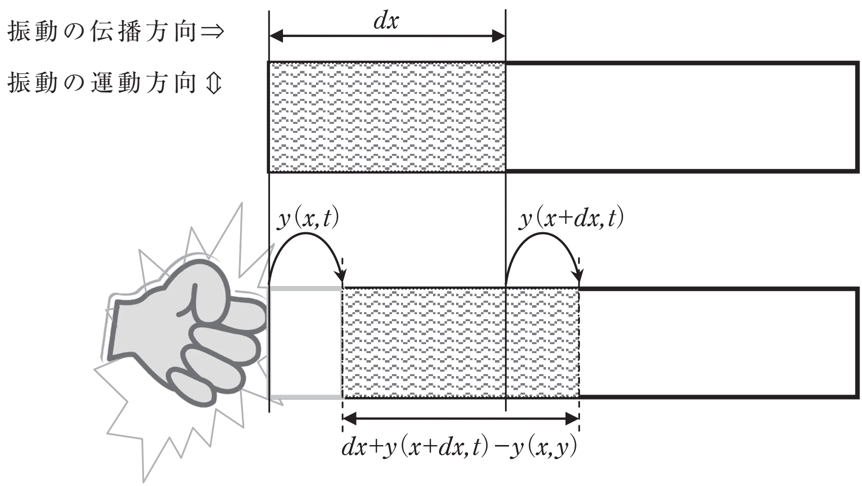

図3　弾性固体を伝播する縦波

に反比例する（ばね定数に相当)。ゆえに、後ほど $dx \to 0$ の極限をとると k は∞に発散してしまう。よって、便宜上このばね定数相当に dx をかけたものを考える（∞にならないようにするため)。この量は必ず有限になるので、$\bar{K}=kdx$ と記す。以上より、両サイドを引っ張る方向の力 $k(y(x+dx, t)-y(x, t))$ に dx をかけた量は、次式(1)となる。なお、この時の力は dx で割った、$\bar{K}\frac{\partial y}{\partial x}$ (4) である。

$$\bar{K}\,(y\,(x+dx,\ t))-y\,(x,\ t)\,dx=\bar{K}\,\frac{\partial y}{\partial x}dx \tag{1}$$

力の向きは、$\frac{\partial y}{\partial x}>0$ のとき（弾性固体が伸びた（膨張した）とき)、ひっぱる向きとなる。この時、力は作用・反作用が働くので、$\bar{K}\frac{\partial y}{\partial x}$ の正負の力に従って引っ張り合う力（膨張する力）や、押し合う力（圧縮する力）になる。なお、仮に右からの力が働いても、左から同じ力が働くのであれば、この二つの力は互いに打ち消し合いキャンセルされる。よって、左からの力と、右からの $\bar{K}\frac{\partial y}{\partial x}$ 力の差が、微小な変化部分に働く正味の力になる。よって、働く力は、次式(2)となる。

$$n\bar{K}\,\frac{\partial y}{\partial x}\,(x+dx,\ t))-\bar{K}\,\frac{\partial y}{\partial x}\,(x,\ t)=\bar{K}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,(x,\ t)\,dx \tag{2}$$

この力は、線密度を ρ とすると、質量 ρdx で表される微小部分に働く。この微小部分に対する運動方程式（$F=ma$：F 力，m 質量，a 加速度)(i) を立てると、次式(3)となる。

$$\bar{K}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx=\rho dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{3}$$

式(3)の両辺を ρdx で割ると、以下の波動方程式(4)を得る。

$$\frac{\bar{K}}{\rho}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4}$$

なお、$\sqrt{\frac{K}{\rho}}$ が波動の伝播速度 v（音の場合、音速）となる。よって１次元の一般的な波動方程式は、以下(５)となる。(扱いやすいように左右辺を入れ替えた。)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (5)$$

5. １次元連続体としてふるまう楽器（笛を例として）

4.節で述べた弾性固体の１次元の波動以外にも、弦（ピアノなど）の振動や気柱内の気体（笛など）の振動も(５)式と同じ１次元波動方程式で記述される。なお、これらをまとめて「1次元連続体」と呼ぶ。特に弦の振動は4.節の弾性固体と同じで、伝播速度 v は、以下(６)のようになる。

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (T：張力,\ \rho：線密度) \qquad (6)$$

さて、ここで、紙面の制約上詳細ははぶくが、1次元波動方程式に従う気柱内の音の波動は、三角関数で記述できる。実際、気柱内の気体 $p=\sin(kx-\omega t)$ は、$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ の１次元波動方程式を満たす。この時の波動の伝播速度は $v=\frac{\omega}{k}$ である。なお、4.節では弾性固体の変量を変数 y として記述したが、以降扱う気柱内では気体の変化を扱うので、この変数 y を変数 p と記すことにする。

音に限らず波動は媒質中で境界（壁など）の影響を受ける。例えば笛については、ある波動が管に入り、もう一方の管の端で反射される状況を考える。実際には反射端から音が漏れるので透過する波動もあるが単純化するため入射する波動と反射する波動のみが存在することにする（これを完全反射という)。この完全反射の場合には入射波と反射波の振幅 P_0 は等しくなる。よって、入射波を $p_i(x,\ t)$、反射波を $p_r(x,\ t)$ と表すと式(７)となる。

$$p_i(x,\ t) = P_0 \sin(\omega t - kx + \phi_i),\ p_r(x,\ t) = P_0 \sin(\omega t - kx + \phi_r) \qquad (7)$$

ここで、$\emptyset_i$, $\emptyset_r$ は波の位相と呼ばれ、境界条件等で決まる。k は波数と呼ばれ波長λと$\lambda=\frac{2\pi}{k}$ の関係となる。実際の音の波動は両者の加算で決まるので、式(8)となる。

$$p(x,\ t)=p_i(x,\ t)+p_\mathrm{r}(x,\ t),$$

$$p(x,\ t)=2P_0\cos\left(kx-\frac{\emptyset_i-\emptyset_r}{2}\right)\sin\left(\omega\mathrm{t}\ \frac{\emptyset_i-\emptyset_r}{2}\right) \tag{8}$$

ここで管は、$x=l$ が閉じられた端で、$x=0$ が開放端であるとする。この場合、開放端では管（笛）の外と同じ圧力であり、圧力変動は少ない。一方、閉鎖端では内部圧力は上がったり下がったりする。実はこの最大圧力変化部が振動の腹となる。従ってこの部分は、以下(9)式の条件を満たす必要がある。

$$\emptyset_\mathrm{i}-\emptyset_\mathrm{r}=2kl-4n\pi\quad(n=0,1,2,\ldots) \tag{9}$$

よって例えば、x=0 での音圧が、$p\ (0,\ t)=P_0\sin\omega t$ で与えられた場合、以下式(10)となる。

$$p(x,\ t)=\frac{P_0}{\cos kl}\cos k(x-l)\sin\omega t \tag{10}$$

式(10)において、管の長さ l と波数 k が、以下(11)式の条件を満たすと、分母が 0 になる。

$$kl=(2m+1)\frac{\pi}{2}\quad(n=0,1,2,\ldots) \tag{11}$$

実際に(11)式の値を取る場合に、笛の音が大きくなる。これが閉管の共鳴となり、笛の音色が選ばれる重要な要素となる。なお、このうち振動数 ν が一番少なくなる以下の等式(12)が最も表れやすい。

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4l} \tag{12}$$

よって、振動数 ν =440 Hz、音速 c=3.4×10^2 m/s とした際に、管（笛）の長さは約 $l=c/(4\nu)=19$ cm となる。

他方、両端が開放されている場合は、両端で圧力変動が最小となる。よって、共鳴条件は以下(13)式となる。

$$kl = m\pi,\quad l = m\frac{\lambda}{2}\quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

この場合に振動数最小のものは以下の(14)式となる。

$$\nu = \frac{c}{2l} \tag{14}$$

よって、笛の閉管の閉じた側を開放すると、1 オクターブ音が低くなる。以上の原理で笛は楽器として機能する。

6. 良い音楽にはよい音が必須

5.節までは理解を助けるために、単純化した 1 次元連続体の波動について論じてきた。実際に音楽を聴く音響空間の波動は、立体的な箱の中の平面波と考える。この場合、次元は 3 次元となり、5.節までの x 軸に加えて y と z 軸を追加し、縦横高さの 3 方向の積で波動を記述する。ちなみに、完全反射の壁に囲まれた音響空間では、5.節の 1 次元モデルと同様の共鳴条件が成り立つ。すると、笛の場合と同じく、音響空間のある場所では音が大きく、ある場所では音が聞こえないという事が起こる。音響空間設計においては、このような事態は深刻であり、特にコンサートホールでは、あってはならないことである。よって、こうした共鳴を防ぐため、ある場所は壁材を音が吸収しやすいものにし、またある場所では音を乱反射させて共鳴をおこりにくくするという工夫が施される。

ちなみに、各地のコンサートホールにおいて、明らかに後付けされた、不

格好な（デザインが周囲と合わない）壁材や天井材がある場合は、設計ミスによる共鳴を解消するため、後から設置された部材と考えられる。

以上より、少々強引ではあるが、楽器や演奏空間を扱う場合、空気の波動を読めなければ、いい音は奏でられないと結論付けられる。

7. おわりに

我々を構成する原子および電子など、微視的で根源的な物理現象を理解する手法に量子力学がある。この量子力学においては、本稿で述べた波動は不可欠である。なぜなら量子力学の世界では、全ての物質が波動（波動関数）で表現されているからである。

なお、本誌の特集テーマ「音」の趣旨として「『音』は文学芸術にとって単に物理的な聴覚刺激以上の意味を持っていると考えられます。『音』に関するさまざまな分野・視点からの投稿を歓迎します。」と記されていた。本稿の末尾で、「空気の波動を読めなければ、いい音楽は奏でられない」と結論付けたが、果たして本稿は本誌の空気を読めたものであったのか、今更ではあるが反省をしなければならない。

謝　辞

本稿は2019年4月17日に本学文芸学部の「音」の会にて、発表させていただいた内容をもとに、会では詳しく述べられなかった箇所を中心に執筆しました。「音」の会にて、諸先生方に拙い発表をお聞きいただき、多くの示唆に富んだご教示を賜りましたこと、ここに感謝申し上げます。

注

（1）電磁波（光、電波等）などの一部のものは真空中でも伝播する（このことで物理学が混乱した時代もあった）。

（2）物理学の世界で「古典（classical)」というのは単に「古い」という意味ではなく、「量子力学ではない」という意味である。また、現代物理学の対義語では必ずしもない。

（3）「弾力」とは「やわらかい」という意味ではなく、「変形に対する復元力を有する」という意味である。

（4）$\bar{K}\dfrac{\partial y}{\partial x}$ 中の ∂ は偏微分記号で、この場合時刻 t を定数と考え、x についてだけ微分す

る（xのみに関する変化率）という意味である。式(1)以降も同様である。

参考文献

(i) Isaac Newton "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica (1687)"; Cambridge Digital Library (2019 年 8 月参照), http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/#