共立女子短期大学生活科学科紀要　第65号　(2022)

アルキメデスの平面充填形を構成する辺の特性を用いた新たな平面充填形の生成方法に関する研究

堀岡　勝

A Study on a New Method for Generating Tessellations Using the Properties of the Edges that Constitute Archimedes' Tessellation

Masaru Horioka

The purpose of this study is to present the possibility of new tessellation. Tessellation is an operation of laying out two-dimensional planes with multiple identical shapes with no overlaps and no gaps, and is also called tiling. The combination of tessellation using geometric shapes has been the subject of research by many mathematicians, and various tessellation patterns have been presented. I focus on the vertices and edges of the shapes that make up the tessellation of Archimedes, and treat them as partially extracted shapes. By concatenating these shapes, I propose how to create a new tessellation pattern.

キーワード：Tessellation　平面充填，Geometry　幾何学，Design　デザイン

Ⅰ．はじめに

幾何学図形等の繰り返しで平面を構成する文様パターンは，古来より世界の生活文化に根付いており，たとえば日本においては和柄文様，国外においてはイスラム建築などの装飾として用いられてきた（図１）。これらの多くの文様パターンは，単純な図式に置き換えることで数学的に証明されている数種の平面充填形として表すことができる。

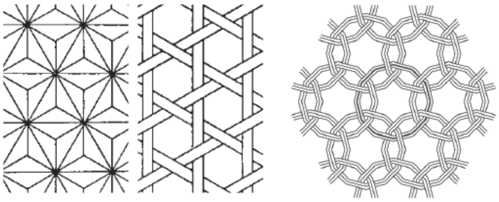

図１　左：和柄文様（「あさのは」と「かごめ」）[1)]
右：イスラム寺院のジリパターンの例[2)]

平面充填とは，一定数の幾何学図形を繰り返し用いて隙間なく二次元平面を敷き詰める操作のことである。１種類の正多角形による平面充填は，正三角形，正方形（正四角形），正六角形の３種類のみが可能であり，各正多角形の内角で360度を割り切れる時のみ平面充填が成立する。これらは正充填形と呼ばれる。

１種類の任意の三角形，四角形，平行六辺形を用いても平面充填が可能であるが，１種類の五角形を用いた場合は，15種の特定条件の五角形による平面充填しか発見されておらず，それ以上存在しないことが主張されている[3)]（図２）。

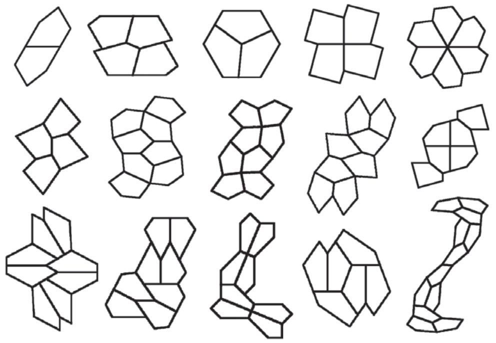

図２　平面充填可能な凸五角形の基本単位ユニット15種類[4]

これらは全て凸多角形という条件の場合であるが，凹多角形や，画家モウリッツ・エッシャーが用いた「平面の正則分割」[5] 等を用いることでも平面充填が可能となることは知られており，条件を緩和することで，１種類の図形であっても正則分割のルール内であれば際限なく平面充填形を創作することができる。

２種類以上の正多角形から生成される平面充填形においては，数多くのパターンが生成可能であるが，各頂点に集まる多角形の数と順番が一定という条件下では，８種類のパターンのみが証明されており,「アルキメデスの平面充填形」（図３）と呼ばれる。この中の７種類の平面充填形の特徴・成立過程について斉藤ら[6] は，一松[7] による「切隅」「面離」「二重切り」「捩り切り」の操作を用いた説明を補足し，正充填形を徐々に変化させることで詳しく解説している。

２種類以上の任意の多角形や図形を用いる場合は，周期的に重ならないように多角形または図形を配置し，その隙間を埋めような多角形または図形を新たに作り出すことで，無限に平面充填形を作り出すことができる。

その他の特徴的な平面充填形としては，ロジャー・ペンローズが発見した２種類の菱形図形を用いた非周期的な平面充填－ペンローズタイルが有名であるが，500年以上前の中世イスラム建築のタイルパターンの中に既に存在したことが後に判明した[8]。

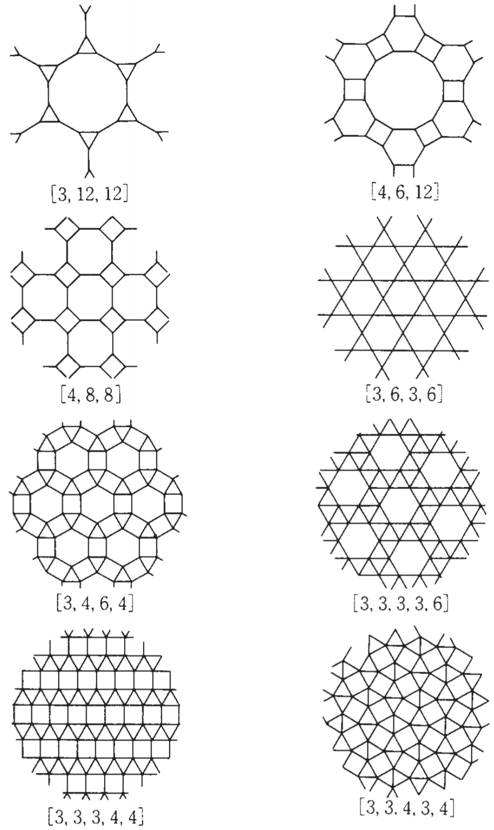

図３　アルキメデスの平面充填形[7]

このように平面充填は，ある程度の制約や規則性の下で様々なパターンが提示されている。

本研究では，これらの平面充填を形成する面同士の結合ではなく，面を形作る辺の集合を図形（以下，線分合図形と呼ぶ）として扱うことで，新たな平面充填形の生成を試みる。対象は正充填形およびアルキメデスの平面充填形に限定し考察する。線分合図形は，平面充填を構成する図形の各辺の中点を切断することで切り取られる放射状の線分の集合を指す。

Ⅱ．線分合図形の抽出と平面充填形の再構成

１．正充填形からの線分合図形の抽出

正三角形，正方形，正六角形をシュレーフリ記号を用いて表すと，それぞれ (3, 6) (4, 4) (6, 3)

となり，各頂点に接続する線分合図形を抜き出すと図４のようになる。これら線分の頂点を結ぶと，正三角形と正六角形の場合は，アルキメデスの平面充填形の１つとなる。正方形の場合は45度回転した平面充填形へと変化する（図５）。

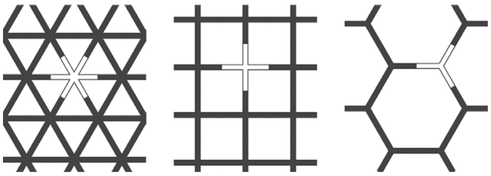

図４　正充填形から抽出した線分合図形
（白抜きの図形部分）

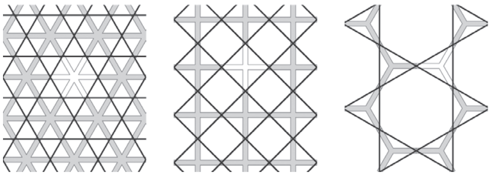

図５　図４の線分合図形の頂点を結ぶことで現れる平面充填形

正充填形の場合，各線分が一直線になるように線分合図形を無作為に並べ直しても，線分合図形自体が回転対称であるため，生成される平面充填形は元の状態から変化することはなく，これらの線分合図形から新しいパターンは生成されないことがわかる。

２．アルキメデスの平面充填形からの線分合図形の抽出

図３に図示した８種類のアルキメデスの平面充填形を，一松はシュレーフリ記号とは区別して，１つの頂点に集まる正多角形の種類と数量を順番に並べて角括弧を使い表している[7]。例えば，図６の平面充填形の場合は，[3, 3, 3, 4, 4] と表され，１つの頂点の周りに正三角形が３つ，正方形が２つ並んでいることを示している。これは，抽出した線分合図形を構成する線分が，それぞれの図形の内角である60°，60°，60°，90°，90°の角度で配されていることを指している。

各図形から抽出された線分合図形は以下の８種類となる（図６～図13）。判別しやすくするために線分を太線とし，基本単位の１つを白抜

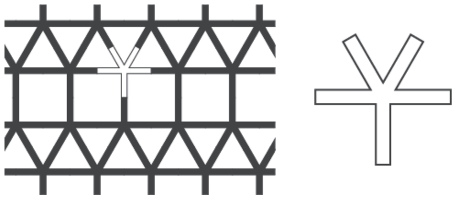

図６　左：T［3, 3, 3, 4, 4］／右：S［3, 3, 3, 4, 4］

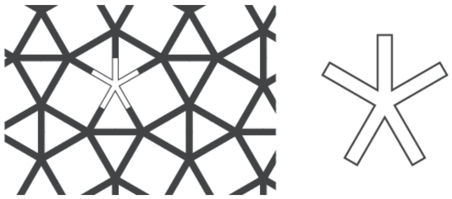

図７　左：T［3, 3, 4, 3, 4］／右：S［3, 3, 4, 3, 4］

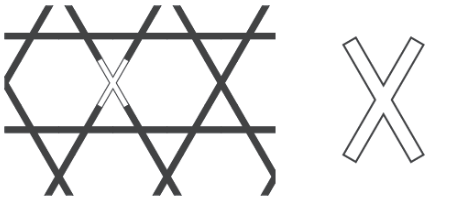

図８　左：T［3, 6, 3, 6］／右：S［3, 6, 3, 6］

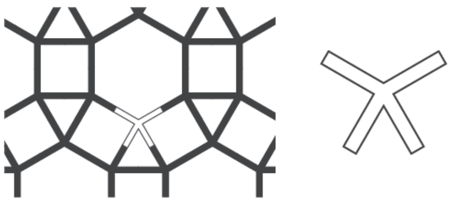

図９　左：T［3, 4, 6, 4］／右：S［3, 4, 6, 4］

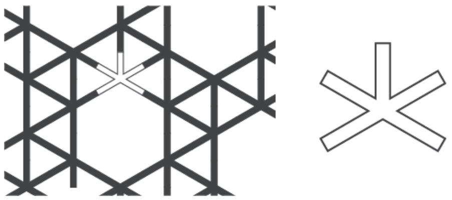

図10　左：T［3, 3, 3, 3, 6］／右：S［3, 3, 3, 3, 6］

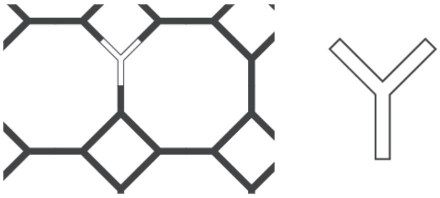

図11　左：T［4, 8, 8］／右：S［4, 8, 8］

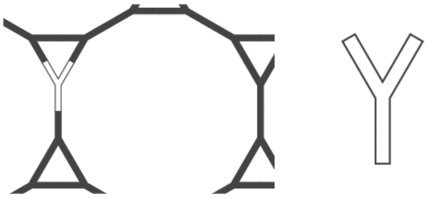

図12　左：T［3, 12, 12］／右：S［3, 12, 12］

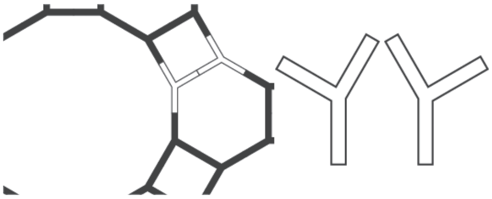

図13　左：T［4, 6, 12］／右：S［4, 6, 12］

き図形としている。平面充填形はT，線分合図形はSを角括弧の前に付け，区別して表す。

3．線分合図形による平面充填形の再構成

図６のS［3, 3, 3, 4, 4］, 図７のS［3, 3, 4, 3, 4］, 図11のS［4, 8, 8］を構成する線分が一直線上に接合し平面充填形が生成されるパターンは，元図T［3, 3, 3, 4, 4］, T［3, 3, 4, 3, 4］, T［4, 8, 8］のみである。図８のS［3, 6, 3, 6］は, 元図T［3, 6, 3, 6］以外に，並進移動により接合させることで菱形で充填された図14を生成する。図９のS［3, 4, 6, 4］は，元図T［3, 4, 6, 4］以外に，90度回転により接合させることで正方形と菱形で充填された図15を生成する。図10のS［3, 3, 3, 3, 6］は，並進と180度回転により接合させることで正三角形と菱形で列状に充填された図16を生成する。さらに組合せ方に制限こそあるが，図17のような正三角形と菱形，正六角形を含む

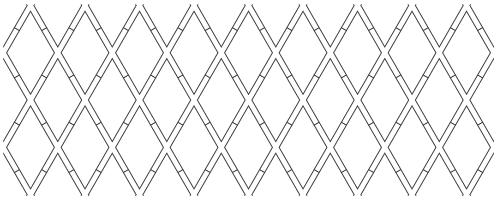

図14　S［3, 6, 3, 6］から新たに生成した平面充填形

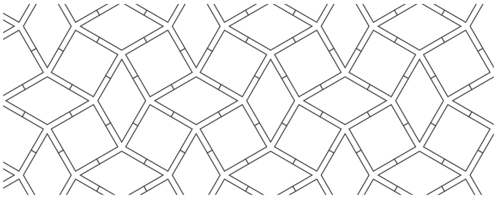

図15　S［3, 4, 6, 4］から新たに生成した平面充填形

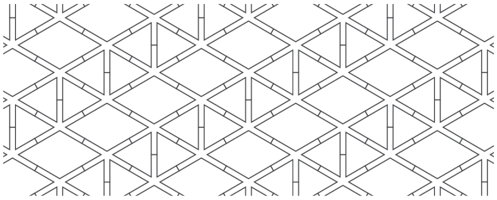

図16　S［3, 3, 3, 3, 6］から新たに生成した平面充填形

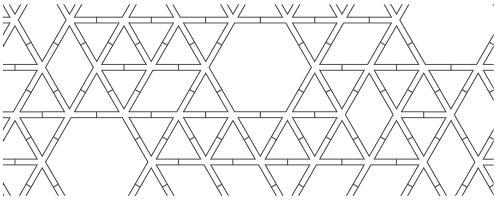

図17　S［3, 3, 3, 3, 6］から新たに生成した非周期の平面充填形

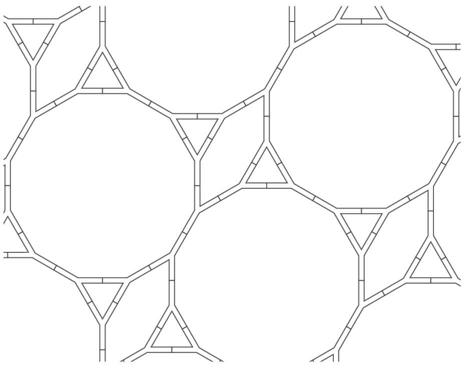

図18　S［3, 12, 12］から新たに生成した平面充填形

非周期パターンの模様を生成することもできる。図12のＳ［3, 12, 12］は，元図Ｔ［3, 12, 12］以外に，元図の接合を一部変化させることで正三角形と正十二角形以外に平行六辺形を含んだ図18を生成する。

４．線分合図形Ｓ［4, 6, 12］よる平面充填形の再構成

図13のＳ［4, 6, 12］は他の線分合図形と異なり同じ正多角形に囲まれておらず，唯一線対象図形ではない。３つの線分のそれぞれの角度が90°，120°，150°となっており，元図Ｔ［4, 6, 12］には鏡像の線分合図形も含まれている。この線分合図形を用いて作られる閉じた凸多角形は，元図［4, 6, 12］に含まれる３つの多角形も含めて11種類存在することを確認した（図19）。そしてこれらの一部の多角形を組み合わせることで，平面充填図形を生成できることも確認できた。（図20）他の組合せ方についても検証を続けている。

線分合図形内の１本の線分を余らせてもよいという条件下であれば，かなり多くの接合パターンを生成することも可能となってくるが，現時点で未検証の部分が多いため，本論では言及しない。

Ⅲ．今後の展望

アルキメデスの平面充填形に含まれる正六角形や正十二角形は，正三角形の集合でもあるため，これらは正三角形または正方形のみによって構成されているとも言える（ただし，正六角形や正十二角形を正三角形で分割した場合は，頂点に集まる正多角形の種類と数量が同一とならない。）Ｓ［4, 6, 12］以外の７種の線分合図形で新たに生成した平面充填形も，同じく正三角形と正方形に分割することができるため，本論において新たな平面充填の可能性を提示できているわけではない。しかし，Ｓ［4, 6, 12］から生成した11種類の多角形のうち，４つの多角形は正三角形，正方形だけでは成立せず，内角

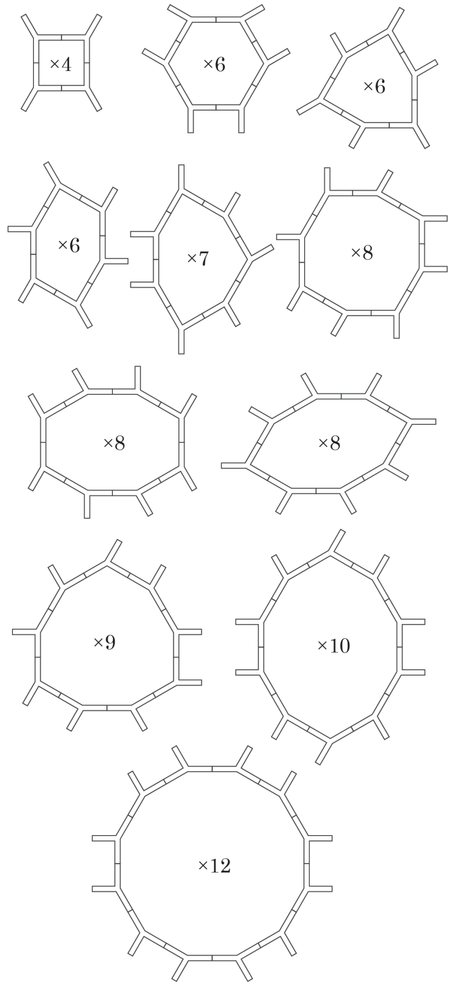

図19　Ｓ［3, 12, 12］を組み合わせて生成した11種類の多角形

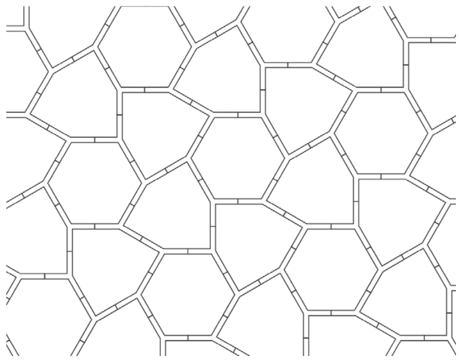

図20　Ｓ［3, 12, 12］から生成した２種類の六角形による平面充填形

が30°，120°，30°，120°の菱形が必要となる（図21）。11種類の多角形内の分割方法は複数存在しているため，これらの双対の図形を調べることで，特殊な図形を発見する手立てとなることが期待できる。

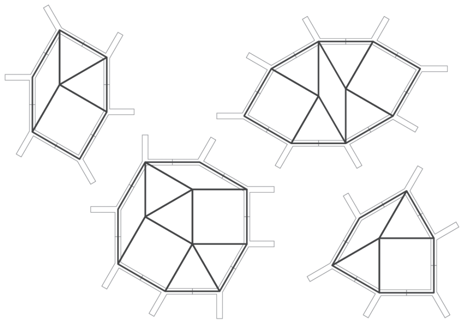

図21　図19の多角形で内部に正三角形，正方形，菱形が含まれるもの

本論では，辺長が全て等しく，構成する内角の数量を限定した条件の多角形においても，平面充填が可能なことを示すことができた。

特に，S［4, 6, 12］の線分合図形を用いた平面充填形は，組合せ方を工夫することで新たな形を生み出すことができるため，パズルなどのプロダクト製品への応用も期待できる。現在，パズルやそれ以外の製品において試作を重ねている段階であるが，この点については別稿とする。

本論で用いた，平面充填形を構成する線分を線分合図形として抜き出して扱う手法を，今後はペンローズタイルなどその他の平面充填形の分析，さらに正多面体による空間充填形の分析においても活用し，研究を進める。

参考文献

1）　高橋研究室編：かたちのデータファイル－デザインにおける発想の道具箱－，彰国社，p91, 1984

2）　谷岡一郎：テセレーション協会誌「形と空間の不思議議－敷き詰め模様で遊ぼう！②」，2013

3）　Michaël Rao：Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane, 2017

4）　Wolfram|Alphaを使用して生成した図形画像を引用

5）　Bruno Ernst：The Magic Mirror of M.C. Escher, 2007

6）　斎藤一哉・野島武敏：平面／空間充填に基づく新しい軽量高剛性コアパネルのモデル化，日本機械学会論文集（A編），73-735，2007

7）　一松信，正多面体を解く，東海大学出版部，p81-p97，2002

8）　Peter J Lu･Paul J Steinhardt，Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, Science, 2007